WS 2014/2015

Ergänzungen zur klassischen Physik: Solitonen, Monopole, Instantonen

Olaf Lechtenfeld

23.01.2015

Präsenzübung 6

P11: Instantonen: die Bogomolny-Schranke

Wir betrachten $SU(n)$ Yang-Mills-Theorie im euklidischen $\mathbb{R}^4$, mit

$$S \;=\; -\frac{1}{8e^2}\int \mathrm{d}^4x\;\operatorname{tr} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \;=\; -\frac{1}{8e^2}\int \operatorname{tr} F\wedge *F\,. \qquad (*)$$

(Alternativ-Interpretation: Energie statischer Yang-Mills-Felder in 4+1 Dimensionen). Hierbei sind:

$$\begin{aligned} F \;&=\; \mathrm{d}x^\mu\wedge\mathrm{d}x^\nu F_{\mu\nu} & (*F)_{\mu\nu} \;&=\; \tfrac12\epsilon_{\mu\nu\rho\lambda}F^{\rho\lambda} \\ F_{\mu\nu} \;&=\; \partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu+[A_\mu,\,A_\nu] & \Leftrightarrow\;\; F \;&=\; \mathrm{d}A+A\wedge A \end{aligned}$$

a) Schreiben Sie die Wirkung $(*)$ um wie folgt,

$$\begin{aligned} S \;&=\; -\frac{1}{16e^2}\int \mathrm{d}^4x\;\operatorname{tr}(F_{\mu\nu}\mp *F_{\mu\nu})(F^{\mu\nu}\mp *F^{\mu\nu}) \;\mp\; \frac{\pi^2}{e^2}\int C_2 \\ &=\; -\frac{1}{16e^2}\int \operatorname{tr}(F\mp *F)\wedge(*F\mp F) \;\mp\; \frac{\pi^2}{e^2}\int C_2\,, \end{aligned}$$

und geben Sie die Chern-Form C_2 an.

b) Weisen Sie nach, dass $\mathrm{d}C_2=0$ sowie $C_2=\mathrm{d}Y_3$ mit

$$Y_3=\frac{1}{8\pi^2}\operatorname{tr}(A\wedge\mathrm{d}A+\frac{2}{3}A\wedge A\wedge A)\,.$$

c) Die Forderung $S<\infty$ erzwingt

$$A_\infty \;\equiv\; A(r\to\infty) \;=\; g^{-1}\mathrm{d}g \qquad \text{mit } g\in SU(n)\,.$$

Zeigen Sie, dass daraus $F_\infty=0$ folgt.

d) Drücken Sie die Chern-Zahl $c_2=\int_{\mathbb{R}^4}C_2$ durch g aus.

Hinweise: Benutzen Sie Stokes' Theorem und drücken Sie $\mathrm{d}A$ durch F aus. Das Ergebnis ist der Abbildungsgrad $k=\deg(g)$ von wo nach wo?

e) Leiten Sie eine Schranke ab für S im Sektor k.

P12: Der Witten-Effekt

Zur Lagrangedichte der Yang-Mills-Theorie im 4-dimensionalen Minkowski-Raum kann ein topologischer Term hinzugefügt werden:

$$\mathcal{L} \;=\; -\frac{1}{8e^2}\,\mathrm{tr}\;F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{\theta}{64\pi^2}\,\mathrm{tr}\;F_{\mu\nu}\;{*F^{\mu\nu}}\,.$$

a) Schreiben Sie diese Lagrangefunktion um als

$$\mathcal{L} \;=\; -\frac{1}{64\pi}\mathfrak{Im}\Big\{\tau\;\mathrm{tr}\,(F_{\mu\nu} + \mathrm{i}\,{*F_{\mu\nu}})(F^{\mu\nu} + \mathrm{i}\,{*F^{\mu\nu}})\Big\}$$

und finden Sie den komplexen Kopplungsparameter $\tau = \tau(e, \theta)$.

b) In der quantisierten Theorie in Anwesenheit von magnetischen Monopolen verschiebt der „θ-Term" die möglichen Werte der elektrischen Ladung. Er kann dann nicht mehr kontinuierlich „wegrotiert" werden, es bleibt jedoch eine diskrete Symmetrie, die erzeugt wird von $\tau \to \tau + 1$ und $\tau \to -\frac{1}{\tau}$. Was bedeuten diese Transformationen für θ und e? (Setzen Sie im zweiten Fall vereinfachend $\theta = 0$.)